MAO et préparation à l'Agrégation

Exercices pour la séance du 23/11/2006

Exercice 1. On considère le polynôme $A = x^6 + 5x^4 + 9x^3 + 4x^2 + 10x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$. Vérifier que le polynôme $B = A \mod 3$ est sans facteurs multiples dans $\mathbb{F}_3[x]$. Déterminer le nombre de facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{F}_3[x]$. Qu'en déduit-on en ce qui concerne la factorisation de A ?

On considère les polynômes suivants, à coefficients dans $\mathbb{Z}$:
$P_1 = 2x^7 + 8x^6 + 9x^5 - 3x^4 + 21x^3 - 13x^2 + 7x + 2$
$P_2 = 2x^{10} + 7x^8 + x^7 + 8x^6 + 4x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
$P_3 = 2x^{11} - 2x^{10} + 11x^9 - 10x^8 + 25x^7 - 20x^6 + 30x^5 - 22x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

Exercice 2. Ecrire un programme qui décompose en produit de facteurs irréductibles un polynôme sur $\mathbb{F}_p[x]$ sans facteurs multiples. Le tester sur les polynômes P_1, P_2 et P_3 modulo p avec, par exemple, $p = 13$.

Comment doit-on choisir p pour que $P_j \mod p$ n'ait pas de facteurs multiples. Changer la valeur de p.

Exercice 3. Ecrire l'un des polynômes précédents modulo p comme produit de deux facteurs premiers entre eux dans $\mathbb{F}_p[x]$. Effectuer les relèvements de Hensel correspondants pour trouver des factorisations modulo $p^2, \ldots, p^6$.

Exercice 4. Donner pour chacun des polynômes précédents une majoration des valeurs absolues des coefficients de ses facteurs.

Exercice 5. Factoriser les polynômes précédents sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Factoriser le polynôme

$$2x^{20} + 18x^{18} + x^{17} + 70x^{16} + 13x^{15} + 152x^{14} + 53x^{13} + 198x^{12} + 108x^{11} + 151x^{10} + 128x^9 + 52x^8 + 87x^7 - x^6 + 26x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1.$$