Recherche Opérationnelle et Optimisation Discrète
Maîtrise MMIM
Examen, Printemps, 2001

Question 1 (3). *On considère le programme linéaire suivant :*
Maximiser : $z = 2x_1 + x_2$
Sous les contraintes : $x_i \geq 0$ *et*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

La solution $x_1 = \frac{20}{3}$, $x_2 = \frac{11}{3}$ *est-elle faisable ? basique ? optimale ?*
Justifiez vos réponses.

Question 2 (4).

1. *Donner une solution optimale du problème :*
   Maximiser : $z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4$
   Sous les contraintes $x_i \geq 0$ *et :*

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 44 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 36 \end{aligned}$$

2. *Donnez un certificat de votre solution.*
3. *En déduire une solution optimale du problème :*
   Maximiser : $z = 5a^2 + b^4 + 6\exp(c) + 2d^8$
   Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4b^4 + 4\exp(c) + d^8 &\leq 44 \\ 8a^2 + 6b^4 + 4\exp(c) + 3d^8 &\leq 36 \end{aligned}$$

Question 3 (4). *Montrer en effectuant le moins de calculs possible que* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$ *est solution optimale de :*

Maximiser : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

Sous les contraintes $x_i \geq 0$ *et :*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 & \leq & 0 \\ +2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 4 \\ 3x_1 \quad + 4x_3 \quad + x_5 & \leq & 3 \\ x_2 - x_3 \quad + 2x_5 & \leq & 2 \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 & \geq & 1 \end{array}$$

Question 4 (4). *On a décomposé un projet en* 12 *tâches élémentaires* $A, B, C, \ldots, K, L$. *En regard de chaque tâche on a porté dans le tableau suivant sa durée ainsi que les tâches qui doivent être achevées pour que cette tâche puisse commencer. On dispose d'autant d'ouvriers que nécessaire.*

Tâches	*Durée*	*Tâches précédentes*
A	7	
B	8	
C	11	
D	3	*A*
E	4	*B,D*
F	8	*A*
G	4	*B,D*
H	10	*B,D*
I	8	*C,E*
J	5	*F,G*
K	3	*F,G*
L	2	*H,I,J*

1. *Quelle est la durée minimale de réalisation du projet ? Donner un plan d'exécution des tâches optimal respectant les contraintes d'antériorité.*
2. *Faire la liste des tâches critiques.*
3. *La durée de la tâche G a été mal évaluée. La durée réelle est en fait de* 6. *Cette erreur aura-t-elle des conséquences sur la durée de réalisation totale du projet ?*
4. *On suppose maintenant que pour chaque tâche il faut dépenser* $1kF$ *en début d'exécution. Donner un plan d'exécution optimal sachant que les crédits alloués au projet sont de* $2kF$ *initialement, et de* $1kF$ *toutes les deux unités de temps par la suite.*

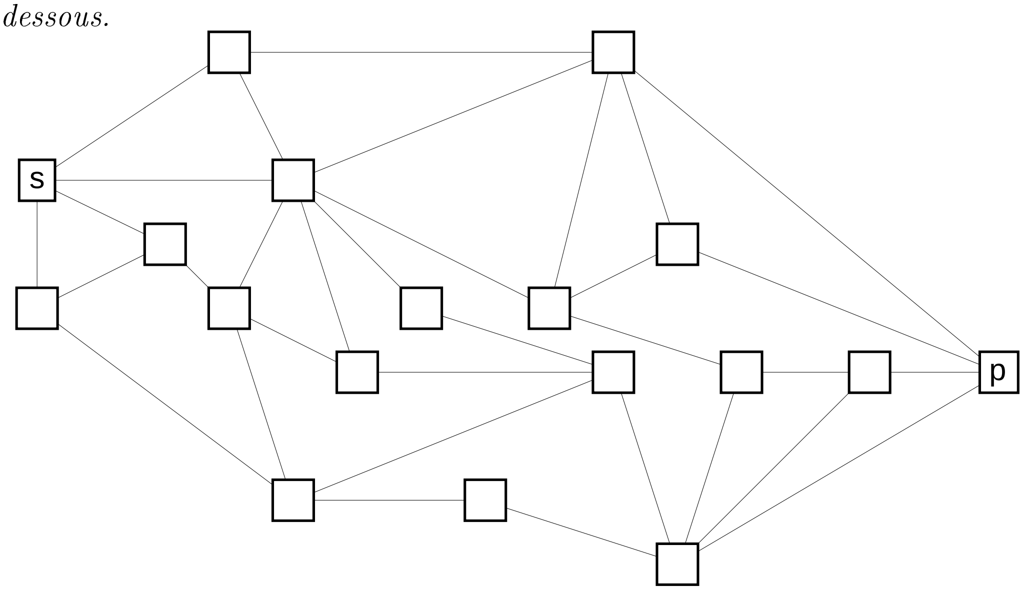
Question 5 (5). *Un (vieux) constructeur de postes de télévisions possède* 4 *modèles à son catalogue : le portatif noir et blanc (M1), le standard noir et blanc (M2), le standard couleur (M3), et le couleur «de luxe» (M4). L'entreprise comporte deux ateliers : montage et tests. Les durées nécessaires pour le montage et le test des différents modèles sont données dans le tableau ci-dessous (en heures).*

	M1	*M2*	*M3*	*M4*
Montage	8	10	12	15
Tests	2	2	4	5

D'autre part, la force de travail de l'atelier de montage correspond à 6000 *heures/mois, celle de l'atelier de tests à* 1500 *heures/mois, et les profits relatifs à la production des postes sont de* $400F$*,* $600F$*,* $800F$ *et* $1000F$ *respectivement pour M1, M2, M3 et M4. Enfin, l'entreprise dispose chaque mois de* 450 *transformateurs et de* 300 *tubes cathodiques couleur. On a besoin d'un transformateur dans chaque poste (noir et blanc ou couleur). La quantité de tubes cathodiques noir et blanc disponibles n'est pas limitée.*

1. *Écrire le problème de maximisation du profit de cette firme sous la forme d'un programme linéaire (P). On précisera très soigneusement quelles sont les variables et les contraintes de ce programme linéaire*
2. *Quel est le plan de production optimal ? Quelle est la valeur correspondante du profit ? Donnez un certificat de votre solution.*
3. *On peut obtenir des transformateurs et des tubes couleur en supplément aux prix respectifs de* $200F$ *et* $500F$*. Conseilleriez-vous d'acheter l'un ou l'autre de ces éléments, ou les deux ? On se contentera de dire, pour chacune des pièces, s'il est intéressant ou non de les acheter, et on justifiera la réponse, mais on ne donnera pas les quantités que l'on conseille d'acheter.*
4. *Le profit sur le poste M3 a été mal évalué. La solution optimale est-elle modifiée si celui-ci passe de* 800 *à* $850F$ *? Même question s'il passe de* $800F$ *à* $900F$ *? Dans chaque cas, on répondra par oui ou par non, en justifiant la réponse proposée mais sans donner, le cas échéant, la nouvelle solution optimale.*
5. *En fait, l'entreprise n'achète ni transformateur, ni tube couleur en supplément (le fournisseur est jugé non fiable). Mais on envisage de lancer sur le marché un nouveau modèle couleur «sport». Ce modèle nécessiterait* 10 *heures de montage,* 3 *heures de test et donnerait un profit de* $800F$*. Évidemment, dans la constitution de ce nouveau modèle entrerait un transformateur et un tube couleur. Pensez-vous qu'il soit intéressant d'envisager la fabrication de ce nouveau modèle ? Si oui, quel est le plan de production proposé ?*

Question 6 (4). *Le but de cet exercice est de retrouver et de démontrer un théorème de Menger. Soit G un graphe non orienté, et s et p deux sommets de ce graphe, comme ci-dessous.*



On cherche à construire un ensemble C de chemins reliant s à p arêtes-disjoints (deux chemins peuvent utiliser le même sommet, mais pas la même arête), en maximisant la taille de C.

- *Montrer sur l'exemple proposé comment on peut modéliser ce problème par une recherche de flot max dans un réseau adéquat.*
- *Donner une solution optimale, ainsi qu'un certificat d'optimalité.*
- *Plus généralement, donner une interprétation combinatoire du théorème de dualité sur les problèmes de flots sous la forme d'un théorème min-max sur le graphe G.*